数 学 年 刊
16A:2 (1995), 127—141.

一般非线性发展方程解的长时间行为

谭 绍 滨 韩 永 前
(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 8009 信箱, 北京 100088)

提 要

本文研究了一般形式的非线性发展方程 Cauchy 问题的解关于时间的渐近性质. 其结果覆盖并部分推广了导数非线性 Schrodinger 方程, Korteweg-de Vries 方程和 Benjamin-Ono 等方程的有关结果.

关键词 非线性发展方程, Cauchy 问题, 渐近性质.
MR(1991)主题分类 35G25, 35B40.

§1. 引 言

本文研究下列具有一般形式的非线性发展方程 Cauchy 问题

$$\partial_t u+\partial_x P(u)+Q(D)u+iR(D)u=0, \tag{1.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \tag{1.2}$$

其中 $i=\sqrt{-1}$; $Q(\cdot)$, $R(\cdot)$ 为实值函数, 它们分别代表方程 (1.1) 的耗散象征和色散象征, u 为复函数, 非线性函数 $P(u)$ 满足下列条件

$$P(u)=\sum_{j=0}^{p} c_j u^{p-j}\bar{u}^j, \tag{1.3}$$

其中 $\bar{u}$ 表示函数 u 的复共轭, $jc_{p-j}=(p+1-j)\bar{c}_{j-1}$, $j=1, \cdots, \left[\frac{p+1}{2}\right]$. 事实上, 条件 (1.3) 等价于

$$\operatorname{Re}(\partial_x P(u), u)_{L^2}=0. \tag{1.4}$$

定义 Fourier 变换及其逆变换如下

$$\hat{f}(\xi)=\int_{R^1} e^{-2\pi i x\xi} f(x)dx, \quad \check{f}(\xi)=\int_{R^1} e^{2\pi i x\xi} f(x)dx. \tag{1.5}$$

这样线性微分算子 $Q(D)$ 和 $R(D)$ 的定义为

$$(Q(D)u)^\wedge=Q(\xi)\hat{u}(\xi), \quad (R(D)u)^\wedge=R(\xi)\hat{u}(\xi). \tag{1.6}$$

我们知道, 在现代物理学中, 许多非线性现象的研究通常被归结为对一系列非线性发展方程的定性与定量研究. 尽管这些方程的形式各式各样, 且物理背景各不相同, 但它们在结构上和内在实质上都有许多引人注目的共同特性. 因此用统一的方式研究这些方程是可能的, 也很有意义. 事实上, 若 $Q(\xi)=0$, 则当 $R(\xi)=\xi^2$ 时, 方程(1.1)为导数非线

本文 1993 年 6 月 11 日收到, 1994 年 4 月 7 日收到修改稿.

性Schrodinger方程，它出现在非线性光学和等离子体物理学中；当$R(\xi)=-\xi^3$时，(1.1)为Korteweg-de Vries方程，而当$R(\xi)=-|\xi|\xi$时，(1.1)为Benjamin-Ono方程，以上两方程经常出现在非线性流体物理的研究中．最近，关于这些非线性发展方程的长时间行为受到人们特别地重视，并对一些典型的色散模型及其相应带耗散效应的模型解的长时间行为进行了研究[1,2,4,15,21,24]．但是在以往的有关文献中关于纯色散问题($Q(\cdot)\equiv 0$)通常假设函数$R(\cdot)$是齐次的，如[17, 24]．在本文中我们不要求$R(\cdot)$满足齐性条件，因此所得结果不仅包含了已知的Korteweg-de Vries方程，Benjamin-Ono方程及导数非线性Schroingder方程的解随时间发展的衰减结果，而且也获得了关于Hirota型方程[8]

$$\partial_t u+\alpha\partial_x^3 u+i\beta\partial_x^2 u+\partial_x P(u)=0$$

及Korteweg-de Vries-Benjamin-Ono方程[7]

$$\partial_t u+\alpha\partial_x^3 u+\beta H(\partial_x^2 u)+\partial_x P(u)=0$$

的解关于时间的衰减性质，这里$H(u)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|\geqslant\varepsilon}\dfrac{u(x-y)}{y}dy$为Hilbert变换．

关于带耗散效应($Q(\cdot)\neq 0$)的非线性色散问题，本文包含并推广了已有的Kordeweg-de Vries-Burgers方程和Benjamin-Ono-Burgers方程有关时间的衰减结果．所得结果同时包含了带Landau阻尼的Benjamin-Ono方程

$$\partial_t u+H(\partial_x^2 u)+\gamma H(\partial_x u)+\partial_x P(u)=0(\gamma>0)$$

以及分别由Ott-Sudan[19]，Ostrovsky[18]引入的非线性发展方程

$$\partial_t u+\partial_x^3 u+\gamma H(\partial_x u)+\partial_x P(u)=0$$

和

$$\partial_t u+\partial_x^3 u+\gamma\overline{H}(\partial_x u)+\partial_x P(u)=0$$

的Cauchy问题解的长时间行为，其中$\overline{H}(u)=\int_{R^1}\dfrac{\operatorname{sgn}(x-y)}{\sqrt{|x-y|}}u(y,t)dy$.

本文的主要目的是在一定条件下研究Cauchy问题(1.1)(1.2)的长时间行为．我们所采用的方法主要基于振荡积分的研究，相位空间的分解及有关的Fourier分析理论．对任意给定的初值$u_0(x)\in H^s(R^1)(s\geqslant 0)$，我们不妨假定问题(1.1)(1.2)存在唯一解$u(x,t)\in C(R^+;H^s(R^1))$．有关适定性方面的结果可参阅文献[3, 8, 11, 13]．在本文的第二节中我们研究在一定条件下带耗散效应($Q(\cdot)\neq 0$)的非线性色散方程Cauchy问题的解关于时间的衰减性质．在第三节中我们将讨论纯色散问题($Q(\cdot)=0$)的基本解的L^p-L^q估计及其空间-时间估计，作为应用，还将在小初值条件下研究非线性色散方程Cauchy问题解的长时间行为．

为简明起见，文中所有与时间无关的不同常数都将用C表示．对于任意实数$p\geqslant 1$，其对偶数为$p'=\dfrac{p}{p-1}$，Sobolev空间$L^p(R^1)$的模简记为$\|\cdot\|_p$，而$L^q(I,L^p(R^1))$的模用$\|\cdot\|_{p,q,I}$表示，Hilbert空间$L^2(R^1)$的内积简记为$(\cdot,\cdot)$．

§2．带耗散效应非线性色散方程的衰减估计

本节研究带耗散效应($Q(\cdot)\neq 0$)非线性色散方程的Cauchy问题(1.1)、(1.2)解的

长时间行为. 我们的主要任务是证明下列定理.

定理 2.1　假设初值 $u_0(x)\in L^\gamma(R^1)\cap L^2(R^1)$, 其中 $1\leqslant\gamma<2$, 且

$$Q(\xi)=\alpha|2\pi\xi|^q,\qquad q\geqslant\frac{1}{2},\quad \alpha>0. \tag{2.1}$$

则有下列结论

(A) 在条件(1.3)之下, 当 p 满足条件

$$2q-1<p\leqslant 2(q+1),\qquad p\geqslant\frac{2}{\gamma} \tag{2.2}$$

时问题(1.1)、(1.2)的解有衰减估计

$$\|u(\cdot,\ t)\|_2\leqslant C(1+t)^{-\frac{2-\gamma}{2q\gamma}},\qquad t\in R^+. \tag{2.3}$$

(B) 在条件(1.3)、(2.2)之下, 当 p 满足条件

$$\frac{-2q\gamma^2+2q^2\gamma^2+2q\gamma+2\gamma-4}{2q\gamma-2\gamma+\gamma^2}\leqslant p<2\left(q+\frac{1}{\gamma}-1\right) \tag{2.4}$$

时问题(1.1)、(1.2)的解有衰减估计

$$\|u(\cdot,\ t)\|_s\leqslant C(1+t)^{-\frac{s-\gamma}{qs\gamma}},\quad \gamma\leqslant s\leqslant 2,\ t\in R^+. \tag{2.5}$$

定理 2.2　设初值 $u_0(x)\in L^1(R^1)\cap L^2(R^1)\cap H^{\frac{r}{2}}(R^1)$, $Q(\xi)$满足条件(2.1), 并且

$$R(\xi)=\beta|2\pi\xi|^r 2\pi\xi(r\geqslant 1,\ \beta\neq 0),\ P(u)=\mu|u|^{p-1}u, \tag{2.6}$$

$$2q-1<p\leqslant\max\{2(q+1),\ 2r+1\},\qquad p\geqslant r+1. \tag{2.7}$$

则问题(1.1)、(1.2)的解有衰减估计

$$\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u\|_2\leqslant C(1+t)^{-\frac{r+1}{2q}},\qquad t\in R^+, \tag{2.8}$$

其中 $\partial_x^{\frac{r}{2}}$ 表示 $-\frac{r}{2}$ 阶 Riesz 势, 即 $(\partial_x^{\frac{r}{2}}f)^\wedge=(2\pi|\xi|)^{\frac{r}{2}}\hat{f}$.

定理 2.3　设初值 $u_0(x)\in L^1(R^1)\cap L^2(R^1)\cap H^{\frac{r}{2}}(R^1)$, $R(\xi)$, $Q(\xi)$满足下列条件

$$R(\xi)=\beta|2\pi\xi|^r,\ Q(\xi)=\alpha|2\pi\xi|^q,\ q>1+\left(\frac{q+r}{2}\right), \tag{2.9}$$

这里(a)表示正实数 a 的小数部分, $\alpha>0$, $\beta\neq 0$, 且

$$P(u)=\mu|u|^{p-1}u,\qquad p=2q-1. \tag{2.10}$$

则问题(1.1)、(1.2)的解有衰减估计

$$\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u\|_2\leqslant C(1+t)^{-\frac{r+1}{2q}},\qquad t\in R^+. \tag{2.11}$$

为了证明上述定理, 我们将需要利用下列引理.

引理 2.1[25]　设 $0<s<1$, $1<p<q<\infty$, 且 $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-s$, 则对任意 $f\in H^s(R^1)$ 有

$$\|f\|_q\leqslant C\|\partial_x^s f\|_p, \tag{2.12}$$

其中常数 C 只依赖于 p, q, ∂_x^s 为 $-s$ 阶 Riesz 势.

引理 2.2　设 $f\in H^{s_0}(R^1)\cap H^{s_1}(R^1)$, 则

$$\|\partial_x^s f\|_2\leqslant C\|\partial_x^{s_0}f\|_2^\theta\|\partial_x^{s_1}f\|_2^{1-\theta}, \tag{2.13}$$

其中 s_0, $s_1\in R^1$, $s=\theta s_0+(1-\theta)s_1$, $\theta\in[0,\ 1]$.

引理 2.3　设 $s\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{q}+s_0$, $2\leqslant q<\infty$, 则对任意 $f\in H^s(R^1)$ 有

$$\|\partial_x^{s_0} f\|_q \leqslant C\|\partial_x^s f\|_2^\alpha \|f\|_2^{1-\alpha}, \tag{2.14}$$

其中 $\alpha = s^{-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}+s_0\right)\in[0,\ 1]$.

证 由引理2.1有 $\|\partial_x^{s_0}f\|_q \leqslant C\|\partial_x^{s'}f\|_2$, 其中 $s'=\frac{1}{2}-\frac{1}{q}+s_0$. 再利用引理2.2得到 $\|\partial_x^{s'}f\|_2 \leqslant C\|\partial_x^s f\|_2^\alpha\|f\|_2^{1-\alpha}$, 其中 $\alpha = s^{-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}+s_0\right)$. 因此由上述两个不等式得到(2.14).

引理 2.4[5] 设 $0<\alpha<1$, $\beta\geqslant 0$, 则有

$$\int_0^t (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{-\beta}ds \leqslant \begin{cases} Ct^{1-\alpha}(1+t)^{-\beta}, & \text{当 } \beta<1 \text{ 时;}\\ Ct^{1-\alpha}(1+t)^{-1}\ln(2+t), & \text{当 } \beta=1 \text{ 时;}\\ C(1+t)^{-\alpha}, & \text{当 } \beta>1 \text{ 时.}\end{cases}$$

2.1. 定理 2.1 的证明

我们分两步来证明该定理的结论. 首先证明估计式(2.3). 事实上, 将方程(1.1)与 u 作内积, 并取实部得

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_2^2 + 2\alpha\|\partial_x^{q/2}u(t)\|_2^2 = 0, \tag{2.15}$$

或

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\alpha\int_0^t \|\partial_x^{q/2}u(s)\|_2^2 ds = \|u_0\|_2^2. \tag{2.16}$$

令 $\Omega=\{\xi;\ (1+t)Q(\xi)\leqslant\lambda\}$, 其中 $\lambda=\frac{2B+1}{2}$, $B\geqslant 0$ 待定. 将(2.15)乘以 $(1+t)^{2B+1}$ 可得

$$\frac{d}{dt}\{(1+t)^{2B+1}\|u(t)\|_2^2\} \leqslant 2\lambda(1+t)^{2B}\|\hat{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{2.17}$$

另外, 由(1.1)、(1.2)有

$$\hat{u}_t + 2\pi i\xi\hat{P}(u) + (Q(\xi)+iR(\xi))\hat{u} = 0, \tag{1.1$_1$}$$

$$\hat{u}(\xi,\ 0) = \hat{u}_0. \tag{1.2$_1$}$$

因此 $\hat{u}(\xi,\ t) = (\hat{u}_0(\xi) - 2\pi i\xi\int_0^t \hat{P}(u)e^{K(\xi)s}ds)e^{-K(\xi)t}$, 其中 $K(\xi)=Q(\xi)+iR(\xi)$, 并且有下列估计

$$\begin{aligned}\|\hat{u}(\xi,\ t)\|_{L^2(\Omega)} &\leqslant \|\hat{u}_0\|_{L^2(\Omega)} + 2\pi\|\xi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_0^t \|\hat{P}(u)\|_{L^2(\Omega)}ds\\ &\leqslant \|u_0\|_\gamma|\Omega|^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}} + 2\pi\|\xi\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}}\int_0^t\|\hat{P}(u)\|_m ds\\ &\leqslant C\lambda^{\frac{1}{q}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{m}\right)}\left\{(1+t)^{-\frac{1}{q}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}\right)} + (1+t)^{-\frac{1}{q}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{m}\right)}\int_0^t\|u\|_{m'p}^p ds\right\},\end{aligned}$$

其中 $m\in[2,\ \infty]$. 记 $A_0=\frac{1}{q}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}\right)$, $A_1=\frac{1}{q}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{m}\right)$. 利用引理2.3得

$$\|\hat{u}(\xi,\ t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\lambda^{A_1}\left\{(1+t)^{-A_0} + (1+t)^{-A_1}\int_0^t\|\partial_x^{\frac{q}{2}}u(s)\|_2^{p\theta}\|u(s)\|_2^{p(1-\theta)}ds\right\},$$

其中 $\theta=\frac{2}{q}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{pm}\right)$. 因 $p\leqslant 2(q+1)$, 所以可选取 $m\in[2,\ \infty]$ 使得 $p\theta\leqslant 2$. 于是有下列估计

$$\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\lambda^{A_1}\left\{(1+t)^{-A_0}+(1+t)^{-A_1}\left(\int_0^t \|\partial_x^{\frac{q}{2}} u(s)\|_2^2\, ds\right)^{\frac{p\theta}{2}}\right.$$

$$\left.\times\left(\int_0^t \|u(s)\|_2^{\frac{2p(1-\theta)}{2-p\theta}}\, ds\right)^{\frac{2-p\theta}{2}}\right\}, \tag{2.18}$$

将(2.18)代入(2.17)得

$$\frac{d}{dt}\{(1+t)^{2B+1}\|u(t)\|_2^2\} \leqslant C(B+1)^{1+2A_1}(1+t)^{2B}$$

$$\times\left\{(1+t)^{-2A_0}+(1+t)^{-2A_1}\left(\int_0^t \|u(s)\|_2^{\frac{2p(1-\theta)}{2-p\theta}}\, ds\right)^{2-p\theta}\right\}. \tag{2.19}$$

当 $p\theta=2$ 时，由(2.19)和(2.16)有

$$\frac{d}{dt}\{(1+t)^{2B+1}\|u(t)\|_2^2\}$$

$$\leqslant C(B+1)^{1+2A_1}(1+t)^{2B}\{(1+t)^{-2A_0}+(1+t)^{-2A_1}\}. \tag{2.20}$$

因 $A_0<A_1$，所以在(2.20)中取 $B=A_0$，然后在$[0, t]$上积分得(2.3)。

当 $p\theta<2$ 时，将(2.16)代入(2.19)得

$$\frac{d}{dt}\{(1+t)^{2B+1}\|u(t)\|_2^2\}$$

$$\leqslant C(B+1)^{1+2A_1}(1+t)^{2B}\{(1+t)^{-2A_0}+(1+t)^{-\frac{p+1-2q}{q}}\}. \tag{2.21}$$

此时，若 $q\leqslant 1$，因 $p\geqslant\frac{2}{\gamma}$，所以 $A_0\leqslant\frac{p+1-2q}{2q}$. 在(2.21)中取 $B=A_0$，并在$[0, t]$上积分得(2.3). 以下不妨设 $q>1$. 在(2.21)中取 $B=\min(A_0, a_1)$，其中 $a_1\equiv\frac{p+1-2q}{2q}$，然后在$[0, t]$上积分得

$$\|u(t)\|_2^2\leqslant C(1+t)^{-2B}, \quad t\in R^+. \tag{2.16$_1$}$$

若 $B=A_0$，则(2.3)得证. 否则 $B=a_1$，将$(2.16)_1$代入(2.19)得

$$\frac{d}{dt}\{(1+t)^{2B+1}\|u(t)\|_2^2\}\leqslant C(B+1)^{1+2A_1}(1+t)^{2B}$$

$$\times\left\{(1+t)^{-2A_0}+(1+t)^{-2A_1}\left(\int_0^t (1+s)^{-\frac{2a_1p(1-\theta)}{2-p\theta}}\, ds\right)^{2-p\theta}\right\}$$

$$\leqslant C(B+1)^{1+2A_1}(1+t)^{2B}\{(1+t)^{-2A_0}+(1+t)^{-2a_2}\}, \tag{2.21$_1$}$$

其中 $a_2\equiv b_0+b_1a_1$，$b_0\equiv A_1-1+\frac{p\theta}{2}=a_1$，$b_1\equiv p(1-\theta)=\frac{p(q-1)m+2(m-1)}{qm}>1$. 在$(2.21)_1$中取 $B=\min(A_0, a_2)$，并在$[0, t]$上积分得

$$\|u(t)\|_2^2\leqslant C(1+t)^{-2B}, \quad t\in R^+. \tag{2.16$_2$}$$

若 $B=A_0$，则(2.3)得证. 否则 $B=a_2$，将$(2.16)_2$代入(2.19)，重复上面的推导，进行迭代. 假设 n 次迭代的结果为

$$\|u(t)\|_2^2\leqslant C(1+t)^{-2a_n}, \quad t\in R^+,\ a_n<A_0. \tag{2.16$_n$}$$

将$(2.16)_n$代入(2.19)得

$$\frac{d}{dt}\{(1+t)^{2B+1}\|u(t)\|_2^2\leqslant C(B+1)^{1+2A_1}(1+t)^{2B}$$
$$\times\left\{(1+t)^{-2A_0}+(1+t)^{-2A_1}\left(\int_0^t(1+s)^{-\frac{2a_np(1-\theta)}{2-p\theta}}ds\right)^{2-p\theta}\right\}$$
$$\leqslant C(B+1)^{1+2A_1}(1+t)^{2B}\{(1+t)^{-2A_0}+(1+t)^{-2a_{n+1}}\},\quad (2.21)_n$$

这里 $a_{n+1}=b_0+b_1a_n=\cdots=b_0(1+b_1+\cdots+b_1^n)$. 在$(2.21)_n$中取 $B=\min(A_0, a_{n+1})$, 然后在$[0, t]$上积分得

$$\|u(t)\|_2^2\leqslant C(1+t)^{-2B},\quad t\in R^+.\quad (2.16)_{n+1}$$

因 $b_0>0$, $b_1\geqslant 1$, 所以存在 $N>0$, 使当 $n\geqslant N$ 时, 有 $a_n\geqslant A_0$. 因此迭代有限次($N+1$ 次)后可得(2.3).

其次, 我们证明估计式(2.5). 由$(1.1)_1$式有

$$|\hat{u}(\xi, t)|\leqslant|\hat{u}_0(\xi)|+C|\xi|\int_0^t|\hat{P}(u)|e^{Q(\xi)(s-t)}ds$$
$$\leqslant|\hat{u}_0(\xi)|+C\int_0^t(t-s)^{-\frac{1}{q}}|\hat{P}(u)|ds;$$
$$\|\hat{u}(\xi, t)\|_{\gamma'}\leqslant\|\hat{u}_0(\xi)\|_{\gamma'}+C\int_0^t(t-s)^{-\frac{1}{q}}\|\hat{P}(u)\|_{\gamma'}ds$$
$$\leqslant C\|u_0\|_\gamma+C\int_0^t(t-s)^{-\frac{1}{q}}\|u\|_{p\gamma}^p ds$$
$$\leqslant C\|u_0\|_\gamma+C\int_0^t(t-s)^{-\frac{1}{q}}\|\partial_x^{\frac{q}{2}}u(s)\|_2^{p\theta}\|u(s)\|_2^{p(1-\theta)}ds,$$

其中 $\theta=\frac{2}{q}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p\gamma}\right)=\frac{p\gamma-2}{pq\gamma}\in[0, 1]$. 因 $p<2\left(q+\frac{1}{\gamma}\right)$, $p\theta<2$, 所以有下列估计

$$\|\hat{u}(\xi, t)\|_{\gamma'}\leqslant C\|u_0\|_\gamma+C\left(\int_0^t\|\partial_x^{\frac{q}{2}}u(s)\|_2^2ds\right)^{\frac{p\theta}{2}}$$
$$\times\left(\int_0^t[(t-s)^{-\frac{1}{q}}\|u(s)\|_2^{p(1-\theta)}]^{\frac{2}{2-p\theta}}ds\right)^{\frac{2-p\theta}{2}}$$
$$\leqslant C+C\left(\int_0^t(t-s)^{-\frac{2}{q(2-p\theta)}}(1+s)^{-\frac{(2-\gamma)p(1-\theta)}{q\gamma(2-p\theta)}}ds\right)^{\frac{2-p\theta}{2}}.$$

利用(2.4)和引理2.4得$\|\hat{u}(\xi, t)\|_{\gamma'}\leqslant C(t\in R^+)$. 因此有下列估计

$$\|u(t)\|_\gamma\leqslant C,\quad t\in R^+.\quad (2.22)$$

由(2.3)、(2.22)用内插定理得(2.5).

2.2. 定理2.2的证明

定义算子 $R_1(D)$ 如下 $(R_1(D)u)^\wedge=\beta(2\pi|\xi|)^r\hat{u}(u\in H^r(R^1))$. 将方程(1.1)与 $R_1(D)u+P(u)$作内积, 并取实部得

$$\frac{d}{dt}\left(\beta\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u\|_2^2+\frac{2\mu}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}\right)+2\alpha\beta\|\partial_x^{\frac{q+r}{2}}u\|_2^2=-(P(u), Q(D)u).\quad (2.23)$$

为了叙述简单, 以后不妨设 $\alpha=\beta=1$. 利用引理2.3得

$$|(P(u), Q(D)u)|=|(\partial_x^{[\frac{q+r}{2}]}P(u),\ \partial_x^{\frac{q-r}{2}+(\frac{q+r}{2})}u)|$$
$$\leqslant C\|u\|_\infty^{p-1}\|\partial_x^{[\frac{q+r}{2}]}u\|_2\|\partial_x^{\frac{q-r}{2}+(\frac{q+r}{2})}u\|_2$$
$$\leqslant C\|u\|_2^A\|\partial_x^{\frac{q+r}{2}}u\|_2^{2-\varepsilon},$$

这里 $2>\epsilon=2-\dfrac{2q+p-1}{q+r}=\dfrac{2r-p+1}{q+r}\geqslant 0$, $A=p-1+\epsilon$. 因此有

$$\frac{d}{dt}\left(\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u\|_2^2+\frac{2\mu}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}\right)+2\|\partial_x^{\frac{q+r}{2}}u\|_2^2\leqslant C\|u\|_2^A\|\partial_x^{\frac{q+r}{2}}u\|_2^{2-\epsilon}. \tag{2.24}$$

若 $\epsilon=0$, 由定理 2.1 知, 存在 $T_0>0$, 使当 $t\geqslant T_0$ 时有 $C\|u\|_2^A\leqslant C(1+t)^{-\frac{A}{2q}}\leqslant 1$. 因此得到下列不等式

$$\frac{d}{dt}\left(\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u\|_2^2+\frac{2\mu}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}\right)+\|\partial_x^{\frac{q+r}{2}}u\|_2^2\leqslant 0,\quad t\geqslant T_0. \tag{2.24$_0$}$$

若 $\epsilon>0$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u\|_2^2+\frac{2\mu}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}\right)+\|\partial_x^{\frac{q+r}{2}}u\|_2^2&\leqslant\|u\|_2^{\frac{2A}{\epsilon}}\\&\leqslant C(1+t)^{-\frac{A}{q\epsilon}},\quad t\in R^+.\end{aligned} \tag{2.24$_1$}$$

令 $B=\dfrac{r+1}{2q}$; 由(2.7)知 $\dfrac{A}{q\epsilon}\geqslant 2B+1(\epsilon>0)$. 用 $(1+t)^{2B+1}$ 乘(2.24)$_0$ 或 (2.24)$_1$ 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{(1+t)^{2B+1}\left(\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u(t)\|_2^2+\frac{2\mu}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}\right)\right\}+(1+t)^{2B+1}\|\partial_x^{\frac{q+r}{2}}u(t)\|_2^2\\&\leqslant(2B+1)(1+t)^{2B}\left(\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u(t)\|_2^2+\frac{2\mu}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}\right)+C\\&\leqslant(2B+1)(1+t)^{2B}\Big\{\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u(t)\|_2^2\\&\quad+C\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u(t)\|_2^{\frac{2(p+1)}{r}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)}\|u(t)\|_2^{(p+1)\left(1-\frac{1}{r}+\frac{2}{r(p+1)}\right)}\Big\}+C\\&\leqslant C_0(1+t)^{2B}\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u(t)\|_2^2+C,\quad t\geqslant T_0.\end{aligned}$$

令 $\Omega(t)=\{\xi;(1+t)|2\pi\xi|^q\leqslant C_0\}$, 则有

$$\begin{aligned}(1+t)^{2B+1}\|\partial_x^{\frac{q+r}{2}}u(t)\|_2^2&=(1+t)^{2B+1}\int_{R^1}|2\pi\xi|^{q+r}|\hat{u}|^2d\xi\\&\geqslant C_0(1+t)^{2B}\int_{\Omega^c(t)}|2\pi\xi|^r|\hat{u}|^2d\xi\\&=C_0(1+t)^{2B}\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u(t)\|_2^2-C_0(1+t)^{2B}\int_{\Omega(t)}|2\pi\xi|^r|\hat{u}|^2d\xi;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{(1+t)^{2B+1}\left(\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u(t)\|_2^2+\frac{2\mu}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}\right)\right\}\\&\leqslant C_0(1+t)^{2B}\int_{\Omega(t)}|2\pi\xi|^r|\hat{u}|^2d\xi+C\\&\leqslant C(1+t)^{2B-\frac{r}{q}}\int_{\Omega(t)}|\hat{u}|^2d\xi+C\\&\leqslant C(1+t)^{2B-\frac{r+1}{q}}+C,\quad t\geqslant T_0;\end{aligned}$$

$$\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u(t)\|_2^2+\frac{2\mu}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}\leqslant C(1+t)^{-2B},\quad t\geqslant T_0. \tag{2.25}$$

利用引理 2.3 和定理 2.1 得

$$\frac{2\mu}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}\leqslant C\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u(t)\|_2^{\frac{p+1}{r}\left(1-\frac{2}{p+1}\right)}\|u(t)\|_2^{p+1-\frac{p-1}{r}}$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u(t)\|_2^2+C(1+t)^{-2B},\quad t\geqslant T_0. \tag{2.26}$$

由(2.25)、(2.26)可得(2.8). 定理2.2得证.

2.3. 定理2.3的证明

将方程(1.1)与 iu_t 作内积并取实部得

$$\frac{\beta}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u(t)\|_2^2-\mathrm{Re}(iQ(D)u,\ u_t)-\mathrm{Re}(i\partial_xP(u),\ u_t)=0, \tag{2.27}$$

这里

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(iQ(D)u,\ u_t)&=\mathrm{Re}(iQ(D)u,\ -\partial_xP(u)-Q(D)u-iR(D)u)\\&=\mathrm{Im}(Q(D)u,\ \partial_xP(u))-\alpha\beta\|\partial_x^{\frac{q+r}{2}}u(t)\|_2^2,\\\mathrm{Re}(i\partial_xP(D)u,\ u_t)&=\mathrm{Re}(i\partial_xP(u),\ -\partial_xP(u)-Q(D)u-iR(D)u)\\&=-\mathrm{Im}(Q(D)u,\ \partial_xP(u))-\mathrm{Re}(\partial_xP(u),\ R(D)u).\end{aligned}$$

利用上述等式得

$$\begin{aligned}\beta\frac{d}{dt}\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u(t)\|_2^2+2\alpha\beta\|\partial_x^{\frac{q+r}{2}}u(t)\|_2^2&=-2\,\mathrm{Re}(\partial_xP(u),\ R(D)u)\\&=-2\beta\,\mathrm{Re}(\partial_x^{[\frac{q+r}{2}]}P(u),\ \partial_x^{\frac{r-q+2}{2}+(\frac{q+r}{2})}u)\\&\leqslant\beta C\|u\|_\infty^{2q-2}\|\partial_x^{[\frac{q+r}{2}]}u\|_2\|\partial_x^{\frac{r-q+2}{2}+(\frac{q+r}{2})}u\|_2\\&\leqslant\beta C\|u\|_2^{2q-2}\|\partial_x^{\frac{q+r}{2}}u\|_2^2.\end{aligned}$$

为了叙述简单,以后不妨设 $\alpha=\beta=1$. 由定理2.1知,存在 $T_1>0$, 使得当 $t\geqslant T_1>0$ 时有 $C\|u\|_2^{2q-2}\leqslant 1$. 因此得

$$\frac{d}{dt}\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u(t)\|_2^2+\|\partial_x^{\frac{q+r}{2}}u(t)\|_2^2\leqslant 0,\quad t\geqslant T_1>0. \tag{2.28}$$

用 $(1+t)^{2B+1}\left(B=\dfrac{r+1}{2q}\right)$ 乘(2.28)得

$$\frac{d}{dt}\left\{(1+t)^{2B+1}\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u(t)\|_2^2\right\}+(1+t)^{2B+1}\|\partial_x^{\frac{q+r}{2}}u(t)\|_2^2$$
$$\leqslant(2B+1)(1+t)^{2B}\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u(t)\|_2^2,\quad t\geqslant T_1>0. \tag{2.29}$$

令 $\Omega(t)=\{\xi;\ (1+t)(2\pi|\xi|)^q\leqslant 2B+1\}$, 由(2.29)有

$$\frac{d}{dt}\{(1+t)^{2B+1}\|\partial_x^{\frac{r}{2}}u(t)\|_2^2\}\leqslant(2B+1)(1+t)^{2B}\int_{\Omega(t)}(2\pi|\xi|)^r|\hat{u}|^2\,d\xi$$
$$\leqslant C(1+t)^{2B-\frac{r}{q}}\|u(t)\|_2^2\leqslant C,\quad t\geqslant T_1>0. \tag{2.30}$$

将(2.30)在 $[0,\ t]$ 上积分可得(2.11). 定理2.3得证.

§3. 纯色散方程的衰减估计

本节讨论纯色散方程 Cauchy 问题解的渐近性质,即考虑下列问题

$$u_t+\partial_x P(u)+iR(D)u=0, \tag{3.1}$$

$$u(x,\ 0)=u_0(x) \tag{3.2}$$

解的长时间行为. 假设色散象征 R: $R^1\to R^1$ 满足以下条件

(I) $R(\xi)=R_1(\xi)+R_2(\xi)$; $R_j(\lambda\xi)=\lambda^{r_j}R_j(\xi)$, $\lambda>0$, $\xi\in R^1$, $j=1,\ 2$; $r_2\geqslant r_1\geqslant 2$.

(II) $R_1(\xi)R_2(\xi)>0$, 当 $\xi\in R^1\backslash\{0\}$ 时.

我们得到了下列结果.

定理 3.1 在条件(I)、(II)之下, 线性问题

$$u_t+iR(D)u=0, \tag{3.3}$$

$$u(x,\ 0)=u_0(x) \tag{3.4}$$

的解 $u(t)=W(t)u_0$ 有下面的估计

$$\|W(t)u_0\|_s\leqslant Ct^{-\frac{1}{r_1}\left(1-\frac{2}{s}\right)}\|u_0\|_{s'},\quad t\in R^+, \tag{3.5}$$

$$\|W(t)u_0\|_{s,q,R^1}\leqslant C\|u_0\|_2, \tag{3.6}$$

其中 $2\leqslant s\leqslant\infty$, $\dfrac{2}{q}=\dfrac{1}{r_1}\left(1-\dfrac{2}{s}\right)$. 且算子半群 $W(t)$ 有下列性质

$$\left\|\int_I W(t-\tau)f(\tau)d\tau\right\|_{s_1,q_1,R^1}\leqslant C\|f\|_{s_2',q_2',I}, \tag{3.7}$$

这里 $I\subseteq R^1$ 为任意区间, $2\leqslant s_j\leqslant\infty$, $\dfrac{2}{q_j}=\dfrac{1}{r_1}\left(1-\dfrac{2}{s_j}\right)$, $j=1,\ 2$.

定理 3.2 在条件(I)(II)之下, 若 $P(u)=\mu|u|^{p-1}u$, 常数

$$p>\frac{1}{2}\left(2+r_1+\sqrt{r_1^2+4r_1}\right),$$

且初值 $u_0(x)\in H^3(R^1)\cap W^{2,\frac{2p}{2p-1}}(R^1)$ 充分小, 则问题(3.1)、(3.2)存在唯一解 $u(x,\ t)\in L^\infty(R^1,\ W^{2,2p}(R^1))$, 且有估计

$$\|u(t)\|_{W^{2,2p}(R^1)}\leqslant C(1+t)^{-\frac{p-1}{pr_1}},\quad t\geqslant 0. \tag{3.8}$$

另外, 有些出现在现代物理中的具体模型, 比如 Hirota 型方程, 其色散象征为 $R(\xi)=\alpha\xi^2+\beta\xi^3$; 以及 Korteweg-de Vries-Benjamin-Ono 方程, 其色散象征为 $R(\xi)=\alpha|\xi|\xi+\beta\xi^3$, $\alpha\beta<0$; 不难发现这两类方程并不满足条件(I)、(II), 但事实上我们仍然得到了下列结果.

定理 3.3 假设方程(3.1)为 Hirota 型方程, 即 $R(\xi)=\alpha\xi^2+\beta\xi^3$, 则由 $-iR(D)$ 生成的算子半群 $W(t)$ 有以下性质

$$\|W(t)u_0\|_s\leqslant Ct^{-\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{s}\right)}\|u_0\|_{s'},\quad t\in R^+,\ 2\leqslant s\leqslant\infty. \tag{3.9}$$

$$\|W(t)u_0\|_{s,q,R^1}\leqslant C\|u_0\|_2,\quad 2\leqslant s\leqslant\infty,\ \frac{2}{q}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{s}\right). \tag{3.10}$$

$$\left\|\int_I W(t-\tau)f(\tau)\,d\tau\right\|_{s_1,q_1,R^1}\leqslant C\|f\|_{s_2',q_2',I}, \tag{3.11}$$

这里 $I\subseteq R^1$ 为任意区间, $2\leqslant s_j\leqslant\infty$, $\dfrac{2}{q_j}=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{2}{s_j}\right)(j=1,2)$. 且若 $P(u)=\mu|u|^{p-1}u$, 常数 $p>\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$, 初值 $u_0(x)\in H^3(R^1)\cap W^{2,\frac{2p}{2p-1}}(R^1)$ 充分小, 则问题(3.1)、(3.2)存在唯一解 $u(x,\ t)\in L^\infty(R^1,\ W^{2,2p}(R^1))$ 且有估计

$$\|u(t)\|_{W^{2,2p}(R^1)}\leqslant C(1+t)^{-\frac{p-1}{3p}},\quad t\geqslant 0.\tag{3.12}$$

定理 3.4 假设方程(3.1)为 Korteweg-de Vries-Benjamin-Ono 方程, 即 $R(\xi)=\alpha|\xi|\xi+\beta\xi^3$. 若 $\alpha\beta>0$, 则定理 3.1 和定理 3.2 的结论成立. 若 $\alpha\beta<0$, 那么由 $-iR(D)$生成的算子半群 $W(t)$同样有估计(3.9)、(3.10)、(3.11); 且若

$$P(u)=\mu|u|^{p-1}u,$$

常数 $p>\frac{5+\sqrt{21}}{2}$, 初值 $u_0(x)\in H^3(R^1)\cap W^{2,\frac{2p}{2p-1}}(R^1)$充分小, 则问题(3.1)、(3.2)的解 $u(x,t)\in L^\infty(R^1, W^{2,2p}(R^1))$也有估计(3.12).

注 我们所得到的结果推广并覆盖了有关纯色散方程关于时间衰减性的已有结论, 但是不能肯定估计式(3.9)中关于时间 t 的衰减指数是否能达到 $-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{s}\right)$, 怎样改进估计式(3.9)是一个有待进一步研究的问题.

为了证明以上定理, 我们将用到下列结论.

引理 3.1[26] 设 $\psi\in C_0^1(R^1)$, $\phi\in C^2(R^1)$, 且在 ψ 的支集上有 $|\phi''(\xi)|\geqslant 1$, 那么

$$\left|\int_{R^1}\exp[i\lambda\phi(\xi)]\psi(\xi)d\xi\right|\leqslant C\lambda^{-\frac{1}{2}}\{\|\psi\|_\infty+\|\psi'\|_1\},$$

其中常数 C 与 λ, ϕ 和 ψ 无关.

引理 3.2 在条件(I)、(II)之下, 令 $G_t(x)=\int_{R^1}\exp[i(-R(\xi)t+2\pi\xi x)]d\xi$, 则问题(3.3)、(3.4)的解为 $u(t)=W(t)u_0=G_t*u_0$, 且 $G_t(x)$有下列估计

$$|G_t(x)|\leqslant Ct^{-\frac{1}{r_1}},\quad t>0,\ x\in R^1.\tag{3.13}$$

3.1. 引理 3.2 的证明

令 $B_1(t)=|R_1(1)t|^{-\frac{1}{r_1}}$, $B_2(t)=|R_1(-1)t|^{-\frac{1}{r_1}}$, 在 R^+ 中作变换 $\eta=\frac{\xi}{B_1(t)}$, 在 R^- 中作变换 $\eta=-\frac{\xi}{B_2(t)}$ 得

$$\begin{aligned}G_t(x)=&B_1(t)\int_{R^+}\exp\{i[-\operatorname{sgn}R_1(1)\eta^{r_1}-R_2(1)t(B_1(t))^{r_2}\eta^{r_2}+2\pi B_1(t)\eta x]\}d\eta\\&+B_2(t)\int_{R^+}\exp\{i[-\operatorname{sgn}R_1(-1)\eta^{r_1}-R_2(-1)t(B_2(t))^{r_2}\eta^{r_2}\\&-2\pi B_2(t)\eta x]\}d\eta=B_1(t)I_1+B_2(t)I_2.\end{aligned}$$

在条件(I)、(II)之下, 为了得到(3.13), 仅需证明下面的不等式

$$|I_t(x)|\leqslant C,\tag{3.14}$$

这里 $I_t(x)=\int_{R^+}\exp[i\phi(x,t,\xi)]d\xi$, $\phi(x,t,\xi)=A_1\xi^{r_1}+A_2(t)\xi^{r_2}+x\xi$, $A_1=\pm1$, $A_1A_2(t)>0$. 事实上, 当 $A_1=-\operatorname{sgn}R_1(1)$, $A_2(t)=-R_2(1)t(B_1(t))^{r_2}$, $y=2\pi B_1(t)x$ 时, $I_t(y)=I_1$; 当 $A_1=-\operatorname{sgn}R_1(-1)$, $A_2(t)=-R_2(-1)t(B_2(t))^{r_2}$, $y=-2\pi B_2(t)x$ 时, $I_t(y)=I_2$.

选取函数 $\phi_0(\xi)\in C^\infty(R^1)$, 使得 $0\leqslant\phi_0(\xi)\leqslant1$, 且当 $\xi<1$ 时 $\phi_0(\xi)\equiv0$, 当 $\xi>2$ 时 $\phi_0(\xi)\equiv1$. 要证明(3.14)仅需证明以下不等式

$$|I_0(x,t)|=\left|\int_{R^1}\exp[i\phi(x,t,\xi)]\phi_0(\xi)d\xi\right|\leqslant C. \tag{3.15}$$

首先，若 $A_1=1$, $x>-r_2A_2(t)$（或者 $A_1=-1$, $x<-r_2A_2(t)$），则(3.15)成立. 事实上，此时有

$$|\phi_\xi(x,t,\xi)|\geqslant r_1|A_1|>0,\quad \xi\geqslant 1,$$

$$|I_0(x,t)|=\left|\int_{R^1}\exp[i\phi(x,t,\xi)]\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\phi_0(\xi)}{\phi_\xi(x,t,\xi)}\right)d\xi\right|$$
$$\leqslant\int_1^\infty\left|\frac{\phi_{\xi\xi}(x,t,\xi)}{(\phi_\xi(x,t,\xi))^2}\right|d\xi+\|\phi_0'\|_1\leqslant C.$$

其次，若 $A_1=1$, $x\leqslant -r_2A_2(t)<0$（或者 $A_1=-1$, $x\geqslant -r_2A_2(t)>0$），则(3.15)也成立. 事实上，可选取函数 $\phi_j\in C^\infty(R^1)$，使得 $\phi_j\geqslant 0(j=1,2)$, $\phi_1+\phi_2\equiv 1$，并且 $\operatorname{supp}\phi_1\subset\Omega_1$, $\phi_2|_{\Omega_2}\equiv 0$，其中

$$\Omega_1=\left\{\xi;\ |r_2A_2(t)\xi^{r_2-1}|\leqslant\frac{3}{2}|x|\right\},\ \Omega_2=\left\{\xi;\ |r_2A_2(t)\xi^{r_2-1}|\leqslant\frac{4}{3}|x|\right\}.$$

令 $r_0=\operatorname{dist}(\partial\Omega_1,\partial\Omega_2)$，则 $\operatorname{mes}(\Omega_1\backslash\Omega_2)=2r_0$, $|\partial_\xi\phi_j(\xi)|\leqslant\dfrac{C}{r_0}(j=1,2)$，这里的常数 C 与 x,t,ξ 无关. 于是有

$$|I_0(x,t)|\leqslant I_{01}+I_{02},$$

其中 $I_{0j}=\left|\int_{R^1}\exp[i\phi(x,t,\xi)]\phi_0(\xi)\phi_j(\xi)d\xi\right|(j=1,2)$. 当 $\phi_2(\xi)\neq 0$ 时，有

$$|\phi_\xi(x,t,\xi)|\geqslant\frac{1}{8}|r_1|A_1|\xi^{r_1-1}+r_2|A_2(t)|\xi^{r_2-1}+|x||\ (\xi\geqslant 1).$$

因此

$$I_{02}\leqslant\left|\int_{R^1}\exp[i\phi(x,t,\xi)]\partial_\xi\left(\frac{\phi_0(\xi)\phi_2(\xi)}{\phi_\xi(x,t,\xi)}\right)d\xi\right|$$
$$\leqslant C\left\{\int_1^\infty\frac{r_1(r_1-1)|A_1|\xi^{r_1-2}+r_2(r_2-1)|A_2(t)|\xi^{r_2-2}}{(r_1|A_1|\xi^{r_1-1}+r_2|A_2(t)|\xi^{r_2-1}+|x|)^2}d\xi+\|\phi_0'\|_1+\|\phi_2'\|_1\right\}\leqslant C.$$

因为 $|\phi_{\xi\xi}(x,t,\xi)|\geqslant 1(\xi\geqslant 1)$，利用引理 3.1 得

$$I_{01}\leqslant C\{\|\phi_0\phi_1\|_\infty+\|(\phi_0\phi_1)'\|_1\}\leqslant C\{1+\|\phi_0'\|_1+\|\phi_1'\|_1\}\leqslant C.$$

所以(3.15)成立. 引理 3.2 得证.

3.2. 定理 3.1 的证明

利用引理 3.2 得 $\|W(t)u_0\|_\infty\leqslant Ct^{-\frac{1}{r_1}}\|u_0\|_1(t>0)$. 另外，显然有 $\|W(t)u_0\|_2=\|u_0\|_2$ $(t\geqslant 0)$. 利用 Riesz 凸性定理[27]得(3.5).

对任意给定的 $\psi\in L^{q'}(R^1,L^{s'}(R^1))$ 有以下不等式

$$\left|\int_{R^2}W(t)\,u_0\bar\psi\,dx\,dt\right|=\left|\int_{R^2}u_0\overline{W}(-t)\,\bar\psi\,dx\,dt\right|$$
$$\leqslant\|u_0\|_2\left\|\int_{R^1}W(-t)\psi\,dt\right\|_2. \tag{3.16}$$

$$\left\|\int_{R^1}W(-t)\psi\,dt\right\|_2^2=\int_{R^2}\psi(x,t)\int_{R^1}\overline{W}(t-\tau)\bar\psi(\tau)d\tau\,dx\,dt$$
$$\leqslant\|\psi\|_{s',q',R^2}\left\|\int_{R^1}W(t-\tau)\psi(\tau)d\tau\right\|_{s,q,R^2}. \tag{3.17}$$

利用(3.5)和 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式[25]得

$$\left\|\int_{R^1} W(t-r)\psi(r)dr\right\|_{s,q,R^1} \leqslant C\left\|\int_{R^1} |t-r|^{-\frac{1}{r_1}\left(1-\frac{2}{s}\right)}\|\psi\|_{s'}dr\right\|_q \leqslant C\|\psi\|_{s',q',R^1}. \quad (3.18)$$

由(3.16)、(3.17)、(3.18)得(3.6)。

对任意的 $\psi\in L^{q'}(R^1, L^{s'}(R^1))$, $2\leqslant s\leqslant\infty$, $\frac{2}{q}=\frac{1}{r_1}\left(1-\frac{2}{s}\right)$, 有以下不等式

$$\begin{aligned}&\left|\int_{R^1}\int_I W(t-r)f(x, r)dr\,\overline{\psi}(x,t)dx\,dt\right|\\ &=\left|\int_{R^1\times I} f(x, r)\int_{R^1}\overline{W}(r-t)\overline{\psi}(t)dt\,dx\,dr\right|\\ &\leqslant\|f\|_{s',q',I}\left\|\int_{R^1} W(t-r)\psi(r)dr\right\|_{s,q,I}\leqslant C\|f\|_{s',q',I}\|\psi\|_{s',q',R^1},\end{aligned}$$

$$\left\|\int_I W(t-r)f(r)dr\right\|_{s,q,R^1}\leqslant C\|f\|_{s',q',I}. \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}\left\|\int_I W(t-r)f(r)dr\right\|_2^2&=\int_{R^1\times I} f(x, r)\int_I \overline{W}(r-t)\overline{W}(t-s)\overline{f}(s)ds\,dx\,dr\\ &\leqslant\|f\|_{s',q',I}\left\|\int_I W(t-r)f(r)dr\right\|_{s,q,I}\leqslant C\|f\|^2_{s',q',I},\end{aligned}$$

$$\left\|\int_I W(t-r)f(r)dr\right\|_{2,\infty,R^1}\leqslant C\|f\|_{s',q',I}. \quad (3.20)$$

不妨设 $2\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant\infty$, $\frac{2}{q_j}=\frac{1}{r_1}\left(1-\frac{2}{s_j}\right)(j=1, 2)$, 则存在 $\alpha\in[0, 1]$ 使得 $\frac{1}{s_1}=\frac{\alpha}{2}+\frac{1-\alpha}{s_2}$, $\frac{1}{q_1}=\frac{1-\alpha}{q_2}$. 利用插值定理和(3.19)、(3.20)得

$$\begin{aligned}&\left\|\int_I W(t-r)f(r)dr\right\|_{s_1,q_1,R^1}\\ &\leqslant\left\{\int_{R^1}\left\|\int_I W(t-r)f(r)\,dr\right\|_2^{\alpha q_1}\left\|\int_I W(t-r)f(r)\,dr\right\|_{s_2}^{(1-\alpha)q_1}dt\right\}^{\frac{1}{q_1}}\\ &\leqslant\left\|\int_I W(t-r)f(r)dr\right\|^{\alpha}_{2,\infty,R^1}\left\|\int_I W(t-r)f(r)\,dr\right\|^{1-\alpha}_{s_2,q_2,R^1}\\ &\leqslant C\|f\|_{s_2',q_2',I}.\end{aligned} \quad (3.21)$$

对任意的 $\psi\in L^{q_1'}(R^1, L^{s_1'}(R^1))$ 利用(3.21)得下列不等式

$$\begin{aligned}&\left|\int_{R^1}\int_I W(t-r)f(x, r)dr\,\overline{\psi}(x, t)dx\,dt\right|\\ &\leqslant\|f\|_{s_2',q_2',I}\left\|\int_{R^1} W(t-r)\psi(r)dr\right\|_{s_1,q_1,I}\leqslant C\|f\|_{s_2',q_2',I}\|\psi\|_{s_1',q_1',R^1},\end{aligned}$$

$$\left\|\int_I W(t-r)f(r)\,dr\right\|_{s_1,q_1,R^1}\leqslant C\|f\|_{s_2',q_2',I}. \quad (3.22)$$

由(3.21)、(3.22)得(3.7)。定理 3.1 得证。

3.3. 定理 3.2 的证明

将方程(3.1)与 $\partial_x^6 u$ 作内积并取实部得

$$\frac{d}{dt}\|\partial_x^3 u(t)\|_2^2\leqslant C\|u(t)\|_\infty^{p-2}\|\partial_x u(t)\|_\infty\|\partial_x^3 u\|_2^2. \quad (3.23)$$

令 $q=2p$, 利用(2.16)($\alpha=0$)式, (3.23)式及 Gagliardo-Nirenberg 不等式得

$$\|u(t)\|_{H^3(R^1)}\leqslant\|u_0\|_{H^3(R^1)}\exp\left(C\int_0^t\|u(s)\|_{W^{2,q}(R^1)}^{p-1}ds\right).$$

问题(3.1)、(3.2)的解可表示为 $u(t)=W(t)u_0+\int_0^t W(t-s)\partial_x g(u(s))ds$，其中 $W(t)$ 为定理 3.1 中的算子半群，$g(u)=\frac{u^p}{p}$．由定理 3.1 得

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{W^{2,q}(R^1)}&\leqslant\|W(t)u_0\|_{W^{2,q}(R^1)}+\int_0^t\|W(t-s)\partial_x g(u(s))\|_{W^{2,q}(R^1)}ds\\&\leqslant C(1+t)^{\frac{2}{qr_1}-\frac{1}{r_1}}\|u_0\|_{W^{2,q'}(R^1)}\\&\quad+C\int_0^t(t-s)^{\frac{2}{qr_1}-\frac{1}{r_1}}\|\partial_x g(u(s))\|_{W^{2,q'}(R^1)}ds,\end{aligned}$$

这里 $q'=\frac{2p}{2p-1}$．利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Hölder 不等式得

$$\|\partial_x g(u(s))\|_{W^{2,q'}(R^1)}\leqslant C\|u\|_{W^{2,q}(R^1)}^{p-1}\|u\|_{H^3(R^1)}.$$

因此

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{W^{2,q}(R^1)}\leqslant{}&C(1+t)^{\frac{2}{qr_1}-\frac{1}{r_1}}\|u_0\|_{W^{2,q'}(R^1)}\\&+C\|u_0\|_{H^3(R^1)}\int_0^t(t-s)^{\frac{2}{qr_1}-\frac{1}{r_1}}\|u(s)\|_{W^{2,q}(R^1)}^{p-1}ds\\&\times\exp\left(C\int_0^t\|u(s)\|_{W^{2,q}(R^1)}^{p-1}ds\right).\end{aligned}$$

令 $M(t)=\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}(1+s)^{\frac{1}{r_1}-\frac{2}{qr_1}}\|u(s)\|_{W^{2,q}(R^1)}$，则有

$$M(t)\leqslant C\delta+C\delta f(t)M^{p-1}(t)\exp(Cg(t)M^{p-1}(t)),$$

其中

$$f(t)=(1+t)^{\frac{1}{r_1}-\frac{2}{qr_1}}\int_0^t(t-s)^{\frac{2}{qr_1}-\frac{1}{r_1}}(1+s)^{\frac{p-1}{r_1}(\frac{2}{q}-1)}ds,$$

$$g(t)=\int_0^t(1+s)^{\frac{p-1}{r_1}(\frac{2}{q}-1)}ds,$$

$\delta=\|u_0\|_{W^{2,q'}(R^1)}+\|u_0\|_{H^3(R^1)}$．由于 $q=2p$，$p>\frac{1}{2}(2+r_1+\sqrt{r_1^2+4r_1})$，不难验证 $f(t)$ 和 $g(t)$ 关于 $t\geqslant0$ 一致有界．因此

$$M(t)\leqslant C_0\delta+C_1\delta M^{p-1}(t)\exp(C_1M^{p-1}(t)).\tag{3.24}$$

由(3.24)知，当 $\delta>0$ 充分小时有 $M(t)\leqslant C$．定理 3.2 得证．

3.4 定理 3.3 的证明

将 $R(\xi)=\alpha\xi^2+\beta\xi^3$ 代入 $G_t(x)$ 的表达式，作变换 $\eta=\xi+\frac{\alpha}{3\beta}$ 得

$$\begin{aligned}G_t(x)&=\int_{R^1}\exp[i\{-(\alpha\xi^2+\beta\xi^3)t+2\pi x\xi]\}d\xi\\&=\exp\left\{i\left[\frac{\alpha^3t}{27\beta^2}-\frac{\alpha}{3\beta}\left(2\pi x+\frac{\alpha^2t}{3\beta}\right)\right]\right\}\\&\quad\times\int_{R^1}\exp\left\{i\left[-\beta\eta^3t+\left(2\pi x+\frac{\alpha^2t}{3\beta}\right)\eta\right]\right\}d\eta.\end{aligned}$$

利用引理 3.2 的结论得 $|G_t(x)|\leqslant Ct^{-\frac{1}{3}}$，$t>0$．完全类似于定理 3.1 和定理 3.2 的证明可得到定理 3.3 的结论

3.5. 定理 3.4 的证明

首先，对于 $\alpha\beta>0$ 的情形，定理 3.4 的结论已在 3.2 节和 3.3 节中被证明了. 因此下面我们只对 $\alpha\beta<0$ 的情形进行论证，这时

$$G_t(x)=\int_{R^1}\exp\{i[-(\beta\xi^3+\alpha|\xi|\xi)t+2\pi x\xi]\}d\xi$$
$$=\int_{R^+}\exp\{i[-(\beta\xi^3+\alpha\xi^2)t+2\pi x\xi]\}d\xi$$
$$+\int_{R^+}\exp\{i[(\beta\xi^3+\alpha\xi^2)t-2\pi x\xi]\}d\xi.$$

所以以后仅需讨论函数 $I_t(y)=\int_{R^+}\exp\{i[(A\xi^3+B\xi^2)t+y\xi]\}d\xi$ 的性质，其中 $A=-\beta$, $B=-\alpha$, $y=2\pi x$(或 $A=\beta$, $B=\alpha$, $y=-2\pi x$). 不妨设 $A>0$, $B<0$. 作变换 $\eta=(At)^{\frac{1}{3}}\xi+\frac{Bt}{3(At)^{2/3}}$ 得

$$I_t(y)=(At)^{-\frac{1}{3}}\exp[-i\phi(y,t)]\int_{D(t)}^{\infty}\exp[i\psi(\eta,y,t)]d\eta,$$

这里

$$\phi(y,t)=\frac{B^3t}{27A^2}+\frac{B}{3A}\left(y-\frac{B^2t}{3A}\right),$$

$$D(t)=\frac{Bt}{3(At)^{2/3}},\quad \psi(\eta,y,t)=\eta^3+(At)^{-\frac{1}{3}}\left(y-\frac{B^2t}{3A}\right)\eta.$$

利用引理 3.2 得 $\left|\int_{R^1}\exp[i\psi(\eta,y,t)d\eta]\right|\leqslant C$, 其中常数 C 与 t, y 无关. 因此

$$|I_t(y)|\leqslant Ct^{-\frac{1}{3}},\quad t>0,$$
$$|G_t(x)|\leqslant Ct^{-\frac{1}{3}},\quad t>0.$$

完全类似于定理 3.1 和定理 3.2 的证明可得到定理 3.4 的结论.

参 考 文 献

[1] Amick, C. J., Bona, J. L., & Schonbeck, M. E., Decay of solutions of some nonlinear wave equations, *J. Diff. Eq.*, **81** (1989), 1—49.

[2] Biler, P., Asymptotic behavior in time of solutions to some equations generalizing the Korteweg-de Vries-Burgers equations, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, **32** (1984), 275—281.

[3] Bona, J. L. &, Smith, R., The initial value problem for the Korteweg-de Vries equation, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **278A** (1975), 555—601.

[4] Dix, D. B., Temporal asymptotic behavior of solutions of the Benjamin-Ono-Burgers equations, *J. Diff. Eq.*, **90** (1991), 238—287.

[5] Dix, D. B., The dissipation of nonlinear dispersive wave: the case of asymptotically weak nonlinearity, *Comm. Part. Diff. Eq.*, **17** (1992), 1665—1693.

[6] Ginibre, J. & Tsutsumi, Y., Uniqueness of solution for the generalized KdV equation, *SIAM J. Math. Anal.*, **20**: (6) (1989), 1388—1425.

[7] Guo Boling & Tan Shaobin, Cauchy problem for a generalized nonlinear dispersive equation, *J. Part. Diff. Eq.*, **5**: 4 (1992), 37—50.

[8] Guo Boling & Tan Shaobin, Global smooth solution for nonlinear evolution equation of Hirota type, *Science in China*, **35**:12 (1992), 1425—1433.

[9] Guo Boling & Tan Shaobin, On smooth solutions to the initial value problem for the mixed nonlinear Schrodinger equations, *Proc. of The Royal. Soc. of Edinburgh*, **119A** (1991), 31—45.

[10] Hayashi, N., The initial value problem for the derivative nonlinear schrodinger equation in the

Energe space, Private Communication, to Appear in Nonlinear Analysis, TMA.

[11] Hayashi, N., Global existence of small analytic solutions to nonlinear Schrodinger equation, *Duke Math. J.*, **60** (1990), 717—727.

[12] Hayashi, N. & Ozawa, T., Modified wave operators for the derivative nonlinear Schrodinger equotion, *Physica D*, **55** (1992), 14—36.

[13] Kenig, C. E., Ponce, G. & Vega, L., On the generalized KdV eqution, *Duke Math. J.*, **59**:3 (1989), 585—610.

[14] Kenig, C. E., Ponce G. & Vega, L., Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations, *Indiana Univ. Math. J.*, **40** (1991), 33—69.

[15] Klainerman, S., Long-time behavior of solutions to nonlinear evolution equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **78** (1982), 73—98.

[16] Klainerman, S. & Ponce, G., Global small amplitude solution to nonlinear evolution equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, **37** (1983), 133—141.

[17] Naumkin, P. I., Asymptotic behavior of solutions to nonlinear equations with dissipation for large x and t, *Study in Appl. Math.*, **87** (1992), 45—60.

[18] Ostrovsky, L. A., Short-Wave asymptotics for weak-shock waves and solitons in mechanics, *Int. J Non-Linear Mechanics*, **11** (1976), 401—416.

[19] Ott, E. & Sudan, R. N., Nonlinear theory of ion acoustic waves with Landau damping, *Phys. Fluids*, **12**:11 (1969), 2388—2394.

[20] Saut, J. C., Sur quelques generalisations de equation de Korteweg-de Vries, *J. Math. Pure Appl.*, **58** (1979), 21—61.

[21] Schonbek, M. E., Decay of solutions to parabolic conservation laws, *Comm. in Part. Diff. Eq.*, **7** (1980), 449—473.

[22] Schonbek, M. E., L^2 decay for weak solutions of the Nonlinear Navier-Stoks equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **88** (1985), 209—222.

[23] Shatah, J., Global existence of small solutions to nonlinear evolution equtions, *J. Diff. Eq.*, **46** (1982), 609—625.

[24] Sidi, A., Sulen, C. & Sulen, P. L., On the long time behavior of a generalized KdV equation, *Acta Appl. Math.*, **7** (1986), 35—47.

[25] Stein, E. M., Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, 1970.

[26] Stein, E. M., Oscillatory integrals in Fourier analysis, Beijing Lecture in Harmonic Analysis, Princeton University Press, 1986, 307—355.

[27] Stein, E. M. & Weiss, G., Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton University Press, 1971.

[28] Strauss, W. A., Nonlinear scattering theory of low energy, *J. Functional Anal.*, **41** (1981), 110—133.

[29] Tan Shaobin, Global solutions to the evolution equation of Schrodinger type with nonlocal term, *Chin. Ann. of Math.*, **14B**: 3 (1993), 279—286.

[30] Tan Shaobin & Zhang Linghai, On weak solution of the mixed nonlinear Schrodinger equations, to be Published in J. of Math. Anal. Appl.

[31] Tan Shaobin & Zhang Linghai, Long time behavior of solutions for a generalized nolinear evolution equation, to Appear.

[32] Tsutsumi, M. & Fukuda, I., On solutions of the derivative nonlinear Schrodinger equation, I *Funkci. Ekvaci.*, **23** (1980), 259—277.

[33] Tsutsumi, M. &, Fukuda, I., On solutions of the derivative nonlinear Schrodinger equation, II *Funkci. Ekvaci.*, **24** (1981), 85—94.

[34] Zhou Yulin, & Guo Boling, The periodic boundary value problems and the initial value problems for the generalized Korteweg-de Vries systems of Higher order, *Acta Math. Sinica*, **27** (1984), 154—176.